УДК 621.74 + 338.4

Д.Ю. ЖУРИЛО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУР В НЕПРЕРЫВНОЛИТОЙ ЗАГОТОВКЕ ПРИ ПОМОЩИ ЭВМ

В статье приводится результаты расчета температурного поля непрерывнолитой заготовки при помощи математического аппарата. Использование функций Бесселя позволяет применять ЭВМ для расчета теплового поля. В конце статьи приведены некоторые рекомендации по изменению параметров непрерывного литья.

Ключевые слова: непрерывнолитая заготовка, функции Бесселя, температура, время паузы, время вытягивания.

Непрерывное литье имеет значительные преимущества, обусловившие его развитие во всем мире. Это и значительный выход годного металла - до 98…99 % от залитого металла в металлоприемник, и высокое качество получаемой заготовки, и относительно небольшие капитальные затраты на оборудование. Но есть и сложности. К ним относят проблематику разделения времени литья на производительную, определяемую временем вытягивания, и непроизводительную, определяемую временем паузы. При неправильном разделении этих параметров не только снижается производительность оборудования, но, часто прекращается процесс литья, так как заготовка способна привариваться к кристаллизатору. Поэтому тепловые параметры непрерывного литья являются исключительно важными. Впервые они были рассмотрены в работах [1…3]. Но появление нового математического аппарата, новых компьютеров позволяет по-иному рассмотреть эту важную проблему.

Пусть в каждой точке (x, y, z) в непрерывнолитой заготовке в момент времени t температура T определяется функцией:

$$T = T\ (x, y, z, t) \qquad (1)$$

Поскольку температура изменяется от точки к точке, в непрерывнолитой заготовке будет происходить перенос тепла от более нагретых частей к менее нагреты Выделим внутри непрерывнолитой заготовки некоторую часть V, ограниченную замкнутой поверхностью S, Выберем на поверхности S точку с координатами (x, y, z) и около нее выделим элемент ΔS поверхности S. Количеством тепла ΔQ, выходящего из V через элемент ΔS за время Δt, определяется законом Фурье:

$$Q = -\ k\ \Delta S \frac{dT}{dn} \Delta t, \qquad (2)$$

где k = k (x, y, z) – коэффициент теплопроводности;

$\frac{dT}{dn}$ - производная функции T(x, y, z, t) в направлении внешней нормали n к поверхности S.

Знак "минус" означает, что если $\frac{dT}{dn}$ >0, то есть температура растет в направлении внешней нормали к поверхности S, то количество тепла, уходящего из V через ΔS будет отрицательно, то есть через ΔS тепло будет входить внутрь непрерывнолитой заготовки. Через всю поверхность S за единицу времени может удалиться количество тепла Q_1:

$$Q_1 = -\iint\limits_{(S)} k(x, y, z)\frac{dT}{dn}\,ds, \qquad (3)$$

В непрерывнолитой заготовке около некоторой точки M (x, y, z) выделим малый элемент ΔV. Если этот элемент потерял за время Δt количество тепла Q_2, и температура этого элемента упала на некоторую величину

Δ T = T (x, y, z, t + Δt) – - T (x, y, z, t), то:

$$\Delta Q_2 = -\Delta T \cdot c(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z) \cdot \Delta V, \qquad (4)$$

где c =c (x, y, z,) – удельная теплоемкость меди в точке M (x, y, z);

ρ = ρ (x, y, z) – плотность меди в этой точке.

Знак «минус» означает, что ΔQ_2 – это тепло, отдаваемое заготовкой, то есть ΔQ_2 >0, когда ΔT<0, Чтобы найти количество тепла ΔQ_3, которое потерял элемент ΔV за единицу времени, следует в (4) вместо ΔT подставить $\frac{dT}{dt}$, то есть количество тепла, теряемого за единицу времени. Тогда,

$$\Delta Q_3 = -c \cdot \rho \frac{dT}{dt}\Delta V, \qquad (5)$$

Количество тепла Q_3, теряемого непрерывнолитой заготовкой за единицу времени, можно найти при помощи тройного интеграла:

$$Q_3 = -\iiint\limits_{(V)} c(x, y, z) \cdot \rho(x, y, z) \cdot \frac{dT}{dt}\,dv, \qquad (6)$$

(Если температура падает, то $\frac{dT}{dt}$ <0 и Q_3<0, как и Q_1) Очевидно, что если внутри непрерывнолитой заготовки V нет источников (или стоков) тепла, то должно выполняться равенство:

$$Q_3 = Q_1, \tag{7}$$

Равенство предполагает, что температура непрерывнолитой заготовки изменилась только за счет того, что непрерывнолитая заготовка потеряла тепло Q_1, ушедшее через поверхность S. Но если внутри непрерывнолитой заготовки имеются источники тепла (а середина Q_3 имеет температуру значительно выше, чем ее края), которые за единицу времени увеличивают количество тепла, содержащегося в непрерывнолитой заготовке на величину Q_4, то вместо (7) получим:

$$Q_3 = Q_1 - Q_4, \tag{8}$$

то есть количество тепла Q_3, обусловливающее изменение температуры непрерывнолитой заготовки, равно разности между количествами тепла, снятого через поверхность S и переданного из середины заготовки. Если f (x, y, z) – это плотность источников тепла, то есть количество тепла, выделяемого единицей объема за единицу времени, то

$$Q_4 = \iiint\limits_{(V)} f\,(x, y, z)dv, \tag{9}$$

Итак, подставляя в (8) выражения (3), (7) и (9), получим:

$$-\iiint\limits_{(V)} c\,(x, y, z)\cdot\rho\,(x, y, z)\frac{dT}{dt}\,dv = -\iint\limits_{(S)} k\,(x, y, z)\,\frac{dT}{dn}\,ds - \iiint\limits_{(V)} f\,(x, y, z)\,dv \tag{10}$$

Для того, чтобы перейти от поверхностного интеграла по S к тройному интегралу по V, используем формулу Остроградского. В формуле Остроградского:

$$-\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}A\,dv = \iint\limits_{(S)} A_n ds, \tag{11}$$

сделаем подстановку: A = k (x, y, z)gradT, тогда A_n = Пр [k (x, y, z)gradT] =

= k(x, y, z) $\frac{dT}{dn}$ и вместо (11) получим:

$$\iint\limits_{(S)} k\,(x, y, z)\,\frac{dT}{dn}\,ds = \iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}\,[k\,(x, y, z)\mathrm{grad}T]dv \qquad (12)$$

Подставляя (11) и (10) и объединяя три интеграла в один, получим:

$$\iiint\limits_{(V)} (c\cdot\rho\frac{dT}{dt} - \mathrm{div}\,(k\cdot\mathrm{grad}T) - f\,(x, y, z))dv = 0 \qquad (13)$$

Так как объем V может быть выбран произвольно, то из (13) следует, что:

$$c\cdot\rho\frac{dT}{dt} - \mathrm{div}\,(k\cdot\mathrm{grad}T) - f\,(x, y, z)dv = 0, \qquad (14)$$

Уравнение (13) является уравнением теплопроводности. Если отливка однородна, то ρ, c и k не зависят от координат. Тогда

$$\mathrm{div}(k\cdot\mathrm{grad}T) = k\cdot\mathrm{div}\cdot\mathrm{grad}T = k\cdot\Delta T, \qquad (15)$$

и вместо (14) получим:

$$\frac{dT}{dt} = a\cdot\Delta T + f\,(x, y, z)\,/(c\cdot\rho), \qquad (16)$$

$$a = k/(c\cdot\rho) \qquad (a > 0) \qquad (17)$$

Число a является коэффициентом теплопроводности. Если f (x, y, z) = 0 , то есть в отливке нет источников тепла (что нереально), то получим однородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{dT}{dt} = a\Delta T, \qquad (18)$$

При радиальном распределении тепла в сплошном твердом цилиндре задается цилиндрическая система координат (φ, z, r) с направлением оси z по оси цилиндра. Принимаем, что в цилиндре радиуса r нет в данный дискретный момент источников тепла и температура зависит только от координаты r и времени t, то есть:

$$T = T(r, t), \qquad (19)$$

Тогда, имея в виду выражение Лапласа в цилиндрической системе координат, получим однородное уравнение теплопроводности:

$$\frac{dT}{dt} = a\,(\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{dT}{dr}), \qquad (20)$$

Оно решается при граничном условии:

$$T(r, t)\,|\,r=r_1 = 0, \qquad (21)$$

и начальном условии:

$$T(r, t)\,|\,r=0 = \psi(r), \qquad (22)$$

Для решения уравнения (20) используется метод разделения переменных, полагая, что

$$T(r, t) = U(r)R(r), \qquad (23)$$

Тогда:

$$\frac{dT}{dt} = R(r)\,\frac{du}{dt}, \qquad \frac{dT}{dr} = U(r)\frac{dR}{dr}, \qquad \frac{d^2T}{dr^2} = U(t)\frac{d^2R}{dr^2}$$

и вместо (20) получим:

$$R(r)\frac{du}{dt} = a\cdot U\,(t)\;(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dR}{dr}), \qquad (24)$$

Разделим переменные:

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{U'(t)}{U(t)} = \frac{R''(r) + \frac{1}{r}\cdot R'(r)}{R(r)} = -\lambda^2,$$

(25)

Здесь λ - заданный параметр разделения. Тогда получим два уравнения:

$$\frac{du}{dt} + \lambda^2\cdot a\cdot U\,(t) = 0, \qquad (26)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dR}{dr} + \lambda^2\cdot R = 0, \qquad (27)$$

Первое уравнение – это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. В общем виде его решением являются уравнения:

$$\frac{du}{dt} = -\lambda^2\cdot a\cdot U; \quad \frac{dU}{u} = = -\lambda^2\cdot a\cdot dt; \quad \ln|u| = -\lambda^2\cdot a\cdot t + \ln C_1;$$

$$U(t) = C_1 \cdot E^{-\lambda^2 \bullet a \bullet t}, \tag{28}$$

Уравнение (27) – это обобщенное уравнение Бесселя, решение которого можно записать в виде:

$$R(r) = C_2 \cdot J^0 (\lambda \cdot r) + C^3 \cdot Y^0 (\lambda \bullet r), \tag{29}$$

Так как при r = 0, то есть на оси заготовки, уравнение (29) должно дать конечное значение, то $C_3 = 0$. Тогда:

$$R(r) = C_2 \cdot J_0 (\lambda \cdot r), \tag{30}$$

и

$$T(r,t) = C_1 C_2 J_0 (\lambda \cdot r)\, E^{-\lambda^2 \cdot a \cdot t}, \tag{31}$$

При $r = r_1$, то есть на боковой поверхности непрерывнолитой заготовки по условию (21) температура равна 0. Следовательно:

$$J_0 (\lambda \cdot r_1) = 0, \tag{32}$$

Это значит, что $\lambda \bullet r_1$ является корнем функции Бесселя $J_0 (x)$. Если δ_m – это m – ый в порядке возрастания положительный корень функции $J_0 (x)$, то есть, если $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3 \ldots < \delta_m < \ldots$, то параметр λ определится из условия:

$$\lambda_m = \frac{\delta_m}{r_1}, \tag{33}$$

Ввиду того, что функция Бесселя $J_0(x)$ имеет бесконечное количество положительных корней, параметр λ может принимать бесконечное множество дискретных значений. Каждому такому значению λ_m (то есть собственному значению) соответствует своя функция

$$R_m (r) = J_0 (\lambda_m \cdot r), \tag{34}$$

Подставляя (34) в (31) и заменяя $C_1 C_2$ на C_m, найдем

$$T_m (r,t) = C_m J_0(\lambda_m r) \cdot E^{-\lambda^2 \cdot a \cdot t}, \tag{35}$$

При выборе этого уравнения при заданном значении m в качестве решения уравнения (20), с учетом (22), получим:

$$C_m \cdot J_0 (\lambda_m \cdot r) = \psi_m, \tag{36}$$

то есть радиальное распределение температуры в начальный момент всегда можно определять функцией Бесселя с индексом ноль. Однако ясно, что функция ψ(r) может быть и иной, так как она задается в качестве начального условия (22). Для того, чтобы удовлетворить условию (22), решение уравнения (20) следует находить в виде линейной комбинации произвольных постоянных и частных решений вида (35), то есть в виде ряда. Ряд имеет вид:

$$T(r,t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot J_0 (\lambda_m \cdot r) \cdot E^{-\lambda^2 \cdot a \cdot t} \tag{37}$$

Для выполнения начального условия необходимо, чтобы

$$\psi(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot J_0 (\lambda_m \cdot r), \tag{38}$$

или

$$\psi(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cdot J_0 (\delta_m \cdot \frac{r}{r_1}), \tag{39}$$

Ряд (39) представляет собой разложение функции ψ(r) по функциям Бесселя. Коэффициенты C_m этого разложения равны:

$$C_m = \frac{2 \cdot \int_0^{r_1} r \cdot \psi_r \cdot J_0(\delta_m \frac{r}{r_1}) dr}{r_1^2 \cdot J_1^2(\delta_m)}, \tag{40}$$

Подставляя C_m из (40) в (37), найдем радиальное распределение температуры в горизонтальной непрерывнолитой заготовке из вторичной меди. Как видно из (35), или (37), временные множители функций $T_m(r,t)$ определяются экспонентой с отрицательным показателем, так что температура во всех точках любого сечения непрерывно – литой заготовки из вторичной меди должна быстро уменьшаться при возрастании времени. Очевидно, что при возрастании времени $t \to \infty$, температура будет стремиться к нулю.

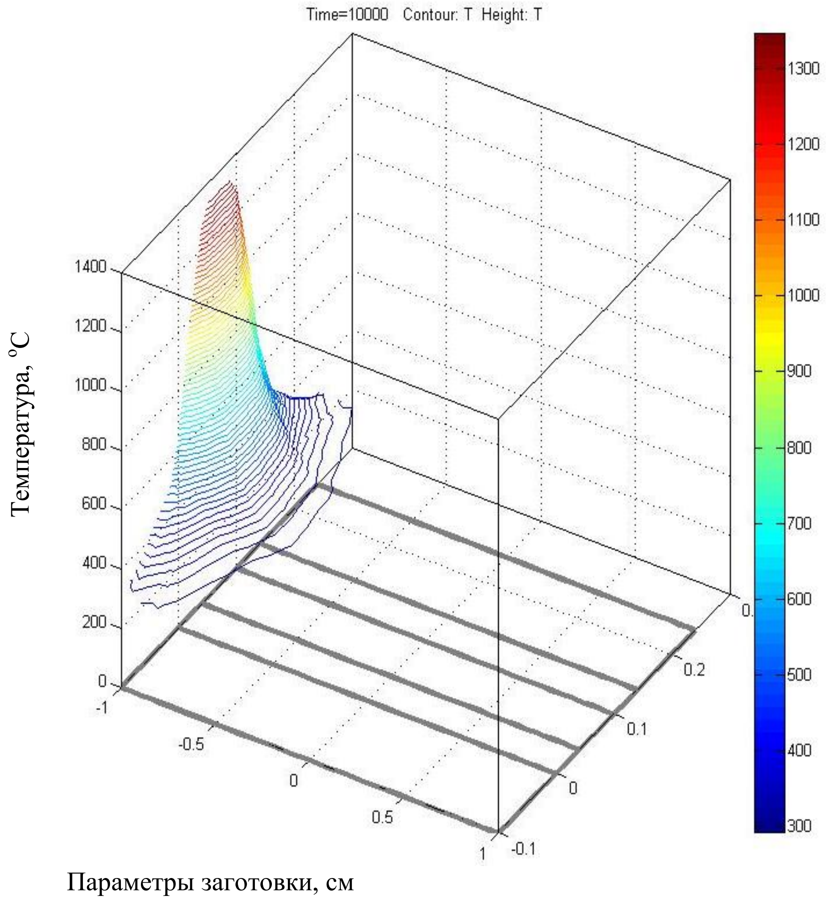

Рис. – Распределение температуры в непрерывнолитой заготовке

Таким образом, определено, что время паузы должно стремиться к минимуму, а время вытягивания должно стремиться к максимуму. При этом шаг вытягивания необходимо выбирать максимально возможный, вплоть до обрыва заготовки. Такие условия работы позволяют использовать оборудование с максимальной производительностью.

Список литературы: **1.** *Вейник А.И.* Теплообмен между слитком и изложницей. / *А. И. Вейник*. - М. : Металлургиздат, 1959. - 367 с. **2.** Охлаждение отливки. Под ред. *А.И. Вейника*. - Минск : Наука и тэхника, 1966. - 300 с. **3.** Приложение теплотехники в литейном производстве. Материалы Второй конференции по проблемам теплофизики в литейном производстве. Под ред. *А.И. Вейника*. - Минск : Вишэйшая школа, 1966. - 228 с. **4.** *Журило Д.Ю.* Тепловой расчет кристаллизатора скользжения машины горизонтального непрерывного литья / *Д.Ю. Журило, А.Г. Журило* // Процессы литья. - 2004.- № 2.- С. 61 - 68.

Надійшла до редколегії 16.05.2013

УДК 621.74 + 338.4

Расчет распределения температур в непрерывнолитой заготовке при помощи ЭВМ / Д.Ю. Журило // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Електроенергетика та перетворювальна техніка. – Х. : НТУ «ХПІ», 2013. – № 34 (1007). – С. 184–192. – Бібліогр.: 4 назв.

У статті наведено результати розрахунку температурного поля безперервнолитої заготовки за допомогою математичного апарату. Використання функцій Бесселя дозволяє застосовувати ЕОМ для розрахунку теплового поля.

Наприкінці статті наведені деякі рекомендації по зміні параметрів безперервного лиття.

Ключові слова: безперервнолита заготовка, функції Бесселя, температура, час паузи, час витягування.

The results of the calculation of the warm-up field happens to in article continuous cast's up with the help of mathematical device. The function Bessel's use allows computer for calculation of the heat field a made.

Some recommendations are brought at the end of the article on change parameter unceasing litho.

Keywords: continuous cast, functions Bessel's, the temperature, time of the pause, time of the work.